Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 17, núm. 2, 2002. Pàg. 29–49

Universalitat de les xarxes petit-món

Javier Ozón

Resum

L'interès de l'efecte petit-món s'explica per l'amplitud del seu abast. No només pot ser útil per comprendre la forma com es propaguen les epidèmies i la ciència de la rumorologia (malauradament, és més fàcil contagiar una malaltia en una xarxa petit-món que en una xarxa ordinària, tal com va succeir l'any 1976 amb el virus Ebola, propagat des del Zaire i Sudan cap a la Gran Bretanya per via d'un investigador resident a l'Àfrica central), sinó que és susceptible de servir de model de xarxes telemàtiques (la *world wide web*, per exemple, o una xarxa GSM de telefonia mòbil) per tal d'escurçar el diàmetre amb un nombre mínim de reconnexions, o com a pauta per comprendre les ingents construccions neuronals del sistema nerviós animal i el mode com les diferents parts del neurocòrtex cerebral entren en ressonància per crear imatges perceptives i reaccions conscients.

Watts i Strogatz van presentar en un article del 1998 un model probabilista de les xarxes petit-món [17] en el qual es donava una definició (una xarxa petit-món és una xarxa amb un grau d'agregació alt i un diàmetre petit) i s'adjuntava una sèrie d'exemples reals: el sistema neuronal del cuc Caenorhabditis Elegans, la xarxa de subministrament elèctric de l'oest dels EUA o el graf de col·laboració de Kevin Bacon. Més endavant es va reproduir el mateix efecte sobre grafs circulants, malles i hipercubs de forma determinista [6], [15] i va quedar palès que l'efecte petit-món pot estendre's i fins i tot accentuar-se de forma determinista.

En aquest treball es demostra la universalitat del fenomen, és a dir, la possibilitat de reproduir l'efecte petit-món sobre qualsevol topologia de xarxa, mitjançant la reducció del diàmetre i el càlcul de les fites inferiors i superiors del factor d'agregació.

1 Introducció

La producció del matemàtic hongarès Paul Erdös (1913–1996) és tan enorme, calculada en nombre d'articles i col·laboradors, que fa temps que circula en la literatura l'anomenada distància Erdös. Un matemàtic té una distància Erdös d'1 si ha cosignat un treball amb ell, distància 2 si ha publicat amb un matemàtic de distància Erdös 1, i així successivament. Es creu que cap matemàtic del món té distància Erdös infinita, entès que hagi cosignat amb un altre autor algun dels seus treballs. Igualment, es pot tenir distància Erdös finita sense ser matemàtic: la distància d'Erdös a Einstein és dos, quatre a Noam Chomsky (famós lingüista i professor al MIT), tres a Jean Piaget (psicòleg i pedagog) i cinc al filòsof Karl Popper.

És possible definir d'aquesta forma una xarxa de col·laboradors d'Erdös amb la peculiaritat (compartida amb la xarxa d'actors dels EUA, l'esquema neuronal del cuc Caenorhabditis Elegans, un mapa de propagació d'epidèmies o la xarxa de subministrament d'una companyia elèctrica) de tenir un alt grau d'agregació i un diàmetre petit. D'aquesta manera, donada una xarxa d'aquest tipus la probabilitat que dos punts adjacents a un tercer punt siguin adjacents entre ells és alta (existeix agregació) i, d'altra banda, la distància entre dos punts és petita en relació a la mida de la xarxa (el diàmetre és petit).

El nom de xarxes petit-món el va determinar el sociòleg nord-americà Stanley Milgram l'any 1967 arran d'un experiment clàssic. Milgram va demanar a un conjunt de voluntaris dels estats de Kansas i Nebraska de fer arribar un correu postal a una sèrie de destinataris amb adreça a la ciutat de Boston, a milers de quilòmetres de distància. Cada persona havia de remetre un sobre amb instruccions a algú, conforme a la seva previsió, amb probabilitat de conèixer el destinatari bostonià: en cas que l'intermediari no conegués el destinatari final havia de repetir el procés i escollir un nou intermediari i així successivament fins a arribar a Boston. El resultat final, conforme al qual només va precisar-se un nombre mitjà de cinc intermediaris, va inspirar la coneguda conjectura dels *sis graus de separació*: no existeix al món cap parella de persones, amb independència del seu origen, separada per una cadena de longitud més gran que sis.

Per tal d'analitzar l'efecte petit-món (és a dir, el diàmetre inesperadament petit d'algunes xarxes amb grau d'agregació alt) és possible recórrer a la teoria de grafs. Un graf és una estructura d'elements relacionats de forma binària, és a dir, un conjunt de vèrtexs (punts dibuixats en el pla) connectats per línies anomenades arestes. Qualsevol xarxa pot ser representada per un graf simple. Així, en l'anomenat graf de col·laboració d'Erdös els vèrtexs es corresponen amb matemàtics i les arestes designen articles firmats en comú (dos vèrtexs són adjacents si i només si representen matemàtics que han firmat almenys un article en col·laboració). El graf associat a una xarxa petit-món ha de respondre per definició a dos trets: d'una banda ha de tenir un diàmetre petit i de l'altra un alt grau d'agregació, pauta que, com es demostra en aquest treball, pot ser reproduïda sota qualsevol topologia de xarxa.

2 Teoria de grafs

Un *graf simple* G és un parell $(V(G), E(G))$ tal que $V(G)$ és un conjunt finit d'elements anomenats *vèrtexs* i $E(G)$ un conjunt finit de parells no ordenats de vèrtexs. Cadascun dels elements de $E(G)$ es denomina *aresta*. L'*ordre* n d'un graf G és el cardinal de $V(G)$. Igualment es defineix la *mida* E d'un graf G com el cardinal d'$E(G)$.

Dos vèrtexs u i v són *adjacents* quan els uneix una aresta uv. El *grau* $\delta(v)$ d'un vèrtex v es calcula com el nombre de vèrtexs adjacents a v.

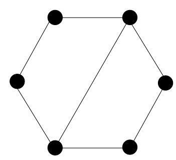

FIGURA 1: Graf connex.

Donat un graf simple d'ordre n el màxim nombre d'arestes que pot contenir és igual a $n(n-1)/2$. La *densitat* $\rho(G)$ d'un graf G d'ordre n es defineix com el quocient entre el nombre d'arestes del graf i el màxim nombre d'arestes que pot contenir un graf d'ordre n. D'aquest mode

$$\rho(G) = \frac{E}{n(n-1)/2} = \frac{2E}{n(n-1)}.$$

Una *seqüència* d'arestes és una successió d'arestes consecutives $v_0v_1, v_1v_2 \dots v_{m-1}v_m$ que dibuixa un camí continu sobre el graf. Una seqüència que no repeteix arestes es denomina *cola* i si tampoc es repeteix cap vèrtex es diu *trajecte*. Un trajecte tancat tal que el primer vèrtex i l'últim són el mateix es denomina *circuit*.

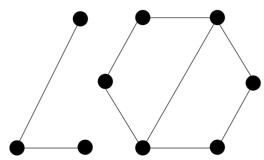

FIGURA 2: Graf no connex.

Un graf G és *connex* si és possible dibuixar com a mínim un trajecte entre dos vèrtexs qualssevol de $V(G)$. Cadascun dels conjunts connexos de vèrtexs en què es pot descompondre un graf no connex s'anomena component connex del graf. La *distància* $d(u, v)$ entre dos vèrtexs u i v es defineix com el cardinal mínim de tots els trajectes possibles entre u i v, és a dir, el nombre mínim d'arestes que cal recórrer per arribar des d'un vèrtex a l'altre. Quan un graf és no connex i dos vèrtexs pertanyen a components diferents es diu que la seva distància és infinita. Finalment, el *diàmetre* D d'un graf G es defineix com la màxima de les distàncies entre dos vèrtexs qualssevol de G.

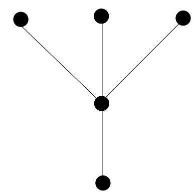

FIGURA 3: Arbre estrella.

Un graf connex que no conté cap circuit és un *arbre*. Un *graf estrella* és un arbre tal que tots els seus vèrtexs tenen grau igual a u excepte un vèrtex anomenat arrel, que és adjacent a la resta de vèrtexs. Un graf *complet* K_n d'ordre n és un graf tal que tots els parells de vèrtexs estan units per una aresta. D'aquesta manera, la mida de K_n, és a dir, el seu nombre d'arestes, és igual a $n(n-1)/2$. Un graf els vèrtexs del qual tenen tots el mateix grau r és un graf *regular* de grau r.

Donat un graf $G(V,E)$, un vèrtex v de $V(G)$ i el conjunt de vèrtexs $\Gamma(v)$ adjacents al vèrtex v es defineix el *factor d'agregació* de v com el percentatge de vèrtexs de $\Gamma(v)$ adjacents entre ells. Així, l'agregació d'un vèrtex v ve determinada per l'expressió $c_v = \mathcal{T}/(\delta(\delta-1)/2)$ on $\mathcal{T}$ és el cardinal del conjunt d'arestes que uneixen vèrtexs de $\Gamma(v)$ (i. e. el nombre de triangles o circuits de longitud tres als quals pertany v) i δ el grau de v. De la mitjana de l'agregació calculada per a cadascun dels vèrtexs de $V(G)$ s'obté el factor d'agregació C_G del graf.

Contràriament a d'altres paràmetres, com per exemple el diàmetre, l'agregació és una magnitud de caràcter local, és a dir, un paràmetre per al càlcul del qual és necessari, únicament, un escombratge de les zones pròximes a cada vèrtex, amb independència de la topologia genèrica del graf.

3 El model de Watts i Strogatz

Com s'ha dit, les xarxes petit-món (des del graf de col·laboradors de Paul Erdös fins a la xarxa de subministrament d'una companyia elèctrica) tenen en comú un diàmetre petit combinat amb un grau alt d'agregació (el que en anglès es coneix com a *clustering*). D'aquesta manera, les xarxes petit-món són xarxes en les quals la distància màxima entre dos vèrtexs (el que en diem diàmetre) és relativament petita, però en les quals el grau d'agregació és alt de manera que, donat un vèrtex, un percentatge alt dels seus veïns són veïns entre ells.

Ara bé, com construir aquest tipus de xarxes o grafs? O dit d'una altra manera, com saber si una xarxa respon a l'estructura de petit-món?

Watts i Strogatz van partir en el seu treball de xarxes regulars en les quals anaven introduint, de forma successiva, alteracions fins a convertir-les en xarxes aleatòries. Una xarxa regular és, com s'ha dit, una xarxa tal que tots els seus vèrtexs tenen el mateix grau. En el cas que ens ocupa, Watts i Strogatz proposaren a més una família amb un alt grau de simetria. Distribuïren els vèrtexs sobre un cercle i els uniren amb els veïns més pròxims tant per la dreta com per l'esquerra (a la figura 4, dos cap a la dreta i dos cap a l'esquerra, però aquesta quantitat pot variar). Aquests grafs, anomenats *grafs circulants*, tenen, com es demostra fàcilment [6], un grau d'agregació i un diàmetre elevats. Cal remarcar que mentre Watts i Strogatz estudiaren les seves xarxes en funció de la distància mitjana, nosaltres hem definit el diàmetre com a factor per a l'estudi de les xarxes petit-món, atès que és un paràmetre més restrictiu i, en general, de càlcul i fitació més senzills. En tot cas el diàmetre sempre pot ser considerat com a fita superior de la distància mitjana d'un graf.

A continuació Watts i Strogatz van prendre una sèrie de grafs circulants (en el seu article d'ordre 1.000 i grau 10) i els anaren modificant de manera probabilista. Així, per a una variable p determinada, Watts i Strogatz escollien cada aresta del graf circulant original amb probabilitat p i la traslladaven cap a una altra zona del graf designada a l'atzar, de manera que per a cada probabilitat van obtenir famílies amb paràmetres diferents: com més gran era p més alt era el percentatge d'arestes modificades i més petits el diàmetre i el grau

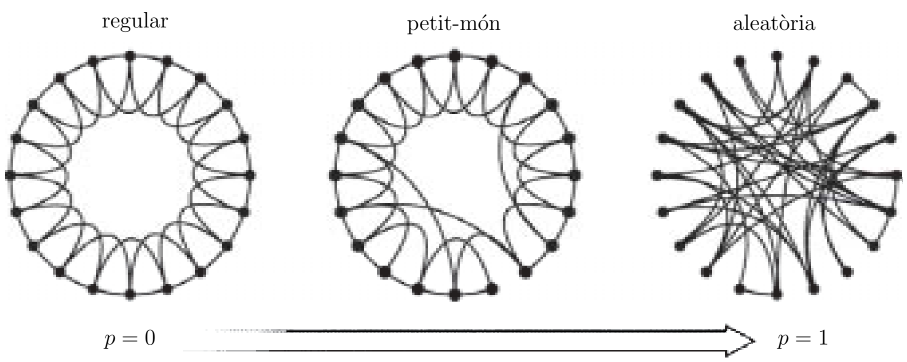

FIGURA 4: La primera figura mostra una xarxa regular amb un grau d'agregació elevat (veïns d'un determinat vèrtex estan connectats entre ells) i diàmetre alt. L'ordre de la xarxa és $n = 20$ i el grau inicial $\Delta = 4$. La tercera figura (xarxa aleatòria), contràriament, té agregació baixa i diàmetre petit. Entre aquests extrems hi ha les xarxes petit-món, amb una agregació elevada i un diàmetre petit.

d'agregació resultants. Tal com havien conjecturat Watts i Strogatz, les xarxes petit-món (és a dir, xarxes amb un diàmetre petit i una agregació alta) van ocupar un lloc al mig de l'espectre entre les xarxes regulars (que presenten molta agregació i diàmetre gran) i les xarxes aleatòries (que, contràriament, tenen un grau d'agregació i un diàmetre petits). Aquesta aparició de l'efecte petit-món s'explica pel fet que encara que les dues corbes de la figura 5 són monòtones, la dinàmica de decreixement de la corba de la distància mitjana (que acota el diàmetre) en funció de p és més acusada que la que dibuixa el factor d'agregació.

Això s'explica pel fet que, per a valors petits de p, cada reconnexió d'una aresta té efectes no lineals sobre la distància mitjana (i el diàmetre), atès que no només escurça la distància entre els vèrtexs reconnectats (que poden estar situats en zones originalment allunyades), sinó que a més ho fa per als seus veïns immediats, i els veïns dels veïns i així successivament, mentre el factor d'agregació disminueix (per als mateixos valors petits de p) conforme a una pauta lineal, molt més lenta que l'anterior. És a dir, mentre la reconnexió d'una aresta pot afectar de forma considerable la distància calculada entre un nombre elevat de vèrtexs, només modificarà, i de forma poc perceptible, el factor d'agregació dels vèrtexs directament afectats per la reconnexió.

És d'aquesta manera que es poden definir, a partir de xarxes regulars i sense haver d'arribar a models completament aleatoris, grafs amb un diàmetre petit i un grau d'agregació elevat, és a dir, xarxes petit-món. En aquests casos, a més, és impossible determinar localment (des d'un dels punts de la xarxa, sense accedir a la resta) la transició de xarxa regular a xarxa petit-món, a causa de la relació del fenomen amb l'estructura global del graf.

Donada la simplicitat del seu model i la independència dels resultats en relació a diferents models de reconnexió Watts i Strogatz van analitzar al seu

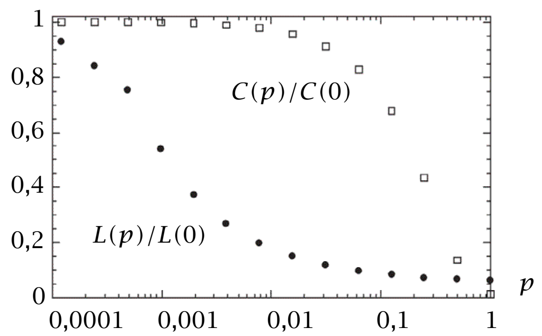

FIGURA 5: Corbes normalitzades de la distància mitjana $L(p)$ i el factor d'agregació $C(p)$ en funció del paràmetre p (dibuixat en escala logarítmica). S'ha partit de grafs circulants d'ordre 1000 i grau 10.

	L	L_a	C	C_a
Xarxa d'actors	3,65	2,99	0,79	0,00027
Xarxa elèctrica	18,7	12,4	0,080	0,005
C. Elegans	2,65	2,25	0,28	0,05

TAULA 1: Relació entre el factor d'agregació C i la distància mitjana L de les xarxes descrites enfront del factor d'agregació C_a i la distància mitjana L_a de les xarxes aleatòries del mateix ordre i mida. Pot apreciar-se com en els tres casos la distància mitjana s'aproxima molt a la de la xarxa aleatòria i com l'agregació, al contrari, és alguns ordres de magnitud major.

article diferents tipus de xarxes reals amb l'objecte de trobar pautes similars a les que havien obtingut amb el seu model probabilista. A la taula 1, extreta de l'article original aparegut a la revista *Nature* [17], es mostren les mesures obtingudes sobre tres tipus de xarxes escollides en funció de la disponibilitat de la informació. Com a primer model Watts i Strogatz van prendre el sistema nerviós de l'espècie *Caenorhabditis Elegans* (cuc nematode d'un mil·límetre de longitud i dotat d'un aparell nerviós simple d'analitzar) en el qual els vèrtexs representaven neurones i les arestes connexions sinàptiques. L'ordre del graf associat va ser en aquest cas de 282 i el grau mitjà igual a 14. En segon lloc es va estudiar el graf (d'ordre 225226 i grau mitjà 61) de col·laboracions fílmiques als EUA, en el qual els vèrtexs representen actors i les arestes participacions en un mateix film. Finalment, es va mesurar la xarxa de distribució d'energia elèctrica de la zona oest dels EUA, en la qual cada transformador o subestació se senyalava amb un vèrtex i les línies d'alta tensió amb les arestes corresponents, i en va resultar un graf d'ordre 4.941 i grau mitjà $2,67$.

En els tres casos es van obtenir mesures similars a les estimades per una xarxa petit-món, és a dir, una distància mitjana relativament petita (en comparació sempre amb la mesura esperada en una xarxa aleatòria del mateix ordre i mida) enfront d'un grau d'agregació alt, mesurat mitjançant el factor d'agregació tal com s'ha descrit en l'apartat anterior. Igualment s'ha descrit el mateix esquema en xarxes de diferent procedència, com per exemple el graf de relació de Paul Erdös [3] i també la *world wide web* [1]. En tots aquests casos és freqüent que vèrtexs adjacents a un vèrtex donat siguin adjacents entre ells (cosa que dóna un factor d'agregació elevat) i que zones de la xarxa allunyades des d'un punt de vista geogràfic estiguin en canvi connectades d'alguna forma, tret que es tradueix en un diàmetre de xarxa petit.

Posteriorment, Watts i Strogatz van efectuar mesures dinàmiques sobre les xarxes petit-món, descrivint amb aquest objecte un model simple de propagació d'epidèmies i estudiant l'evolució dels paràmetres de la infecció (principalment, temps de propagació de la malaltia en cas que la probabilitat de contagi sigui 1 i probabilitat de contagi a partir de la qual la meitat de la població queda finalment infectada) en funció de la probabilitat p que regula l'efecte petit-món. D'aquesta forma, Watts i Strogatz no només van deixar palesa la dependència de l'evolució del model sinó que a més van determinar la llei matemàtica que relacionava els paràmetres de la infecció de la malaltia amb la probabilitat p que regula l'evolució de l'efecte petit-món. Es va demostrar així que una xarxa petit-món és susceptible de propagar malalties a gran velocitat i que és possible passar d'una xarxa protegida (diàmetre alt) a una topologia vulnerable (diàmetre reduït) sense notar alteracions en l'estructura local de la xarxa (mesurada en aquest cas pel seu factor d'agregació), o el que és el mateix, sense que un observador local, que és l'observador típic, pugui prescriure mesures preventives. Anàlogament, s'ha estudiat el fenomen de l'aparició de criticalitat autoorganitzada en les xarxes petit-món [15] i s'ha demostrat, igual que en el model de la propagació de malalties, que la criticalitat afecta de forma més accentuada una xarxa petit-món que una xarxa regular de diàmetre elevat i que és possible passar d'una xarxa regular a una xarxa susceptible de patir fenòmens de criticalitat sense alterar la topologia local del graf.

4 Xarxes petit-món deterministes

Com s'ha dit, tot el laboriós procés de redistribució de les arestes en la formació de les xarxes petit-món es pot dur a terme de forma determinista, desviant les connexions d'uns punts a d'altres del graf no de forma aleatòria, com van fer Watts i Strogatz, sinó amb l'objecte de minimitzar el diàmetre. S'han definit així les anomenades *xarxes petit-món deterministes* [6], [15], que presenten les mateixes característiques que les xarxes de Watts i Strogatz però accentuades.

Amb aquest objecte s'escolliren per cada graf circulant un conjunt de vèrtexs anomenats *hubs* i s'uniren posteriorment amb un graf connex, generalment un graf complet, estrella o un graf doble-circulant de tal manera que es conservés l'agregació amb una reducció màxima del diàmetre. Amb aquesta estratègia (que ha permès conservar la regularitat de les xarxes resultants en el cas en què els *hubs* s'han connectat amb un graf doble-circulant) és possible, per exemple, partir d'una xarxa amb 4 milions de vèrtexs (un graf circulant d'ordre 4×10^6) de manera que el diàmetre inicial de 1.000 pugui ser reduït fins a 10 reconnectant només 250 vèrtexs (és a dir, fent, per exemple, que una persona de la població s'entrevisti amb 249 individus) i amb una variació final del factor d'agregació d'aproximadament un 25×10^{-6} per cent, és a dir, gairebé imperceptible.

Repetint el mateix procediment es van obtenir resultats semblants en altres famílies de grafs, com les denominades *malles* (versió en dues dimensions dels grafs circulants) i també en els *hipercubs*, grafs en els quals els vèrtexs són paraules binàries de longitud fixa i es dibuixen arestes entre paraules amb només un bit de diferència. Aquesta aparent facilitat de reproduir l'efecte petit-món va plantejar la possibilitat que l'efecte es pogués reproduir en qualsevol família de grafs, tal com es demostra en els apartats següents. Això vol dir que donada qualsevol xarxa o graf, amb una topologia arbitrària i un diàmetre gran, sempre serà possible reduir el seu diàmetre de forma considerable (i en un factor arbitràriament gran) sense induir en l'operació variacions perceptibles del grau d'agregació, és a dir, sense que un observador local, que acostuma a ésser l'observador típic, pugui adonar-se directament dels canvis. Si tornem al cas de la propagació d'epidèmies que van estudiar Watts i Strogatz podríem dir que un observador local només podrà percebre en primer lloc petites variacions en l'agregació local i molt més endavant (i per vestir millor el fenomen diríem que quan ja fos massa tard) les conseqüències, que poden ser importants, del substanciós escurçament del diàmetre de la xarxa.

5 Universalitat de l'efecte petit-món: reducció del diàmetre

Com s'ha dit, una possible estratègia capaç de reduir el diàmetre d'un graf, aplicada als grafs circulants i a d'altres famílies, consta d'un doble procés de selecció de vèrtexs i de la seva reconnexió mitjançant un graf connex de diàmetre petit, que acostuma a ser un graf complet o un graf estrella. D'aquesta forma, donat un graf $G = (V, E)$, que pot ser connex o no connex, és possible reduir el seu diàmetre escollint primer de tot un conjunt de vèrtexs $H \subseteq V(G)$, anomenats *hubs*, de cardinal h, de tal forma que tot vèrtex $v \in V(G)$ estigui a distància més petita o igual a k d'algun dels vèrtexs d'H, i connectant seguidament els vèrtexs d'H amb un graf connex G_H. Això ens ha de portar a un problema de k-distància dominació [8], [9].

Es diu que un subconjunt $H \subseteq V$ de vèrtexs d'un graf $G = (V, E)$ és un conjunt k-distància dominador si qualsevol vèrtex $v \in V$ es troba a distància menor o igual a k de com a mínim un vèrtex d'H. En aquest cas denominarem *hubs* els vèrtexs d'H i denotarem el seu cardinal com h. Un conjunt de vèrtexs és k-distància dominador minimal si no hi ha conjunts k-distància dominadors de G de cardinal menor que h.

Si prenem d'aquesta forma un graf $G = (V, E)$ i un conjunt k-distància dominador H de G i unim a continuació els vèrtexs d'H amb un graf connex de diàmetre D_H, podrem traslladar-nos d'un vèrtex qualsevol a un altre del graf a través, en primer lloc, dels trajectes que van de cada vèrtex al *hub* corresponent, trajectes de com a molt distància k, i d'un tercer trajecte que unirà els dos *hubs* i tindrà com a molt distància D_H. Per tant, el graf $G' = (V, E')$ resultant d'unir els *hubs* de G amb un graf connex de diàmetre D_H tindrà diàmetre

$$D_f \leq 2k + D_H \,. \tag{1}$$

En aquest article, amb l'objecte de minimitzar els efectes de la reconnexió sobre l'agregació del graf, la connexió dels grafs s'ha fet amb un graf estrella, de tal manera que les reconnexions aniran sempre d'un dels *hubs* a un *hub arrel*, tal com s'oberva a la figura 6. L'elecció del graf estrella com a graf reconnector respon a un doble motiu. D'una banda el graf estrella, que és un cas particular d'arbre, és òptim en el sentit que no és possible obtenir un graf connex amb un nombre més petit d'arestes. D'altra banda, fixat el seu ordre (i. e. el nombre de vèrtexs d'H, que denotarem com h), no existeix cap graf de diàmetre més petit i que a més tingui un nombre menor d'arestes. Atès que el diàmetre del graf estrella és 2 l'única possibilitat d'escurçar el diàmetre implicaria la utilització del graf complet, de diàmetre la unitat. En aquest cas, tanmateix, farien falta $h(h-1)/2$ arestes per unir els *hubs*, quantitat molt més elevada que les $h-1$ arestes necessàries per unir els *hubs* amb el graf estrella (la qual cosa garantirà una variació menor del factor d'agregació). És per aquest doble motiu (diàmetre quasi-mínim i mida mínima) que finalment s'ha escollit el graf estrella d'ordre h com a graf reconnector dels *hubs*.

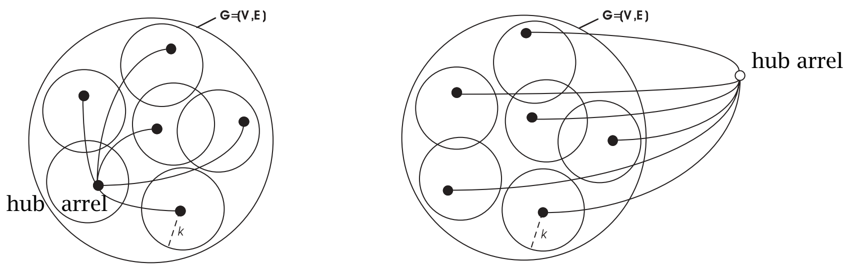

FIGURA 6: Elecció i reconnexió dels *hubs* mitjançant un graf estrella. Els vèrtexs dibuixats de negre denoten els vèrtexs del conjunt k-distància dominador i els cercles el conjunt de vèrtexs k-distància dominats per cada *hub* (i. e. a distància menor o igual a k del corresponent *hub*). Finalment cada *hub* es connecta al *hub* arrel, que pot pertànyer al conjunt k-distància dominador o bé ésser un vèrtex afegit al graf, amb la qual cosa resulten dues possibilitats de reconnexió amb un diàmetre final més petit o igual a $2(k+1)$.

D'altra banda és possible, tal com s'il·lustra a la figura 6, afegir al graf un nou vèrtex (com a *hub* arrel) al qual estarien connectats, mitjançant el graf estrella, els h vèrtexs del conjunt k-distància dominador. En aquest cas H continuarà denotant el conjunt k-distància dominador de cardinal h, al qual afegirem un nou *hub* arrel, de manera que el nombre de *hubs* serà igual a $h+1$. Encara que aquesta possibilitat d'afegir un vèrtex com a *hub* arrel no afecta els resultats relacionats amb la reducció del diàmetre sí que té importància en el càlcul de la variació del factor d'agregació de l'apartat següent. Amb l'objecte de calcular la variació del factor d'agregació en aquest apartat comptarem, primer de tot, el nombre de vèrtexs afectats per la reconnexió dels *hubs*, per a la qual cosa aplicarem la proposició següent.

1 PROPOSICIÓ (HENNING, OELLERMANN, SWART [9]) *Per a $k \geq 1$, si G és un graf connex d'ordre $n \geq k+1$, aleshores existeix un conjunt de vèrtexs k-distància dominador de cardinal menor o igual a $n/(k+1)$.*

Això vol dir que, donat un graf G connex d'ordre n, és possible escollir un conjunt H de com a màxim $n/(k+1)$ vèrtexs (que anomenarem *hubs*) tal que qualsevol vèrtex del graf estigui a una distància més petita o igual a k de com a mínim un dels *hubs* d'H. Si a continuació es reconnecten els *hubs* escollits amb un graf estrella resultarà un graf de diàmetre $D_f \leq D' = 2k+2 = 2(k+1)$, que s'obté de substituir D_H per 2 en l'equació 1.

Si en comptes d'un graf connex tinguéssim un graf no connex l'esquema es podria repetir per a cadascun dels components connexos del graf seleccionant per a cada component un conjunt de *hubs* i reconnectant al final, amb el graf estrella, la unió d'aquests conjunts. En aquest cas el diàmetre final vindria afitat per la mateixa expressió $D_f \leq D' = 2(k+1)$ i el cardinal d'H (sumant el nombre de *hubs* calculat per a cadascun dels components) seria igualment el mateix. Tanmateix, la condició $n \geq k+1$ de la proposició 1 hauria de considerar-se per separat per a cadascun dels components connexos del graf. D'aquesta manera resultaria en cada cas $n_i \geq k+1$, on n_i és el nombre de vèrtexs del component connex i de G.

Com s'ha dit abans, per calcular la variació del factor d'agregació després de la reconnexió dels *hubs* haurem de comptar els vèrtexs implicats en l'operació. D'aquesta manera, donats un graf G i un conjunt k-distància dominador H, es defineix el paràmetre f_n com el percentatge de vèrtexs de G que pertanyen a H, és a dir, el percentatge de vèrtexs afectats per alguna reconnexió en el procés de reducció del diàmetre del graf, i resulta $f_n = \frac{h}{n}$. Per simplicitat de notació, en el cas que el *hub* arrel sigui un vèrtex afegit al graf no es comptabilitzarà en el paràmetre h.

D'ara endavant es considerarà que H és un conjunt k-distància dominador de cardinal h i que els seus vèrtexs vindran reconnectats per un graf estrella (que podrà afegir o no un vèrtex addicional com a *hub* arrel), de manera que resultarà un diàmetre final $D_f \leq 2(k+1)$. D'aquesta forma, segons la proposició 1 tindrem

$$h \leq \frac{n}{k+1},$$

i considerant que en aquest cas $D_f \leq D' = 2(k+1)$,

$$f_n = \frac{h}{n} \leq \frac{1}{k+1} = \frac{1}{D'/2} \leq \frac{1}{D_f/2}. \tag{2}$$

2 Exemple Donat un graf connex G és possible reduir el seu diàmetre per sota de $D_f = 20$ amb independència del diàmetre inicial i de forma que el percentatge de vèrtexs afectats sigui $f_n \leq 1/10 = 0{,}1$ i un nombre d'arestes afegides menor o igual a $n/10 - 1$. D'altra banda, atès que l'ordre d'un graf connex és sempre superior al seu diàmetre i per tant $n > D > D_f = 20$, la variació de la densitat del graf serà:

$$\Delta_d \leq \frac{n/10 - 1}{n(n-1)/2} < \frac{n/10}{n(n-1)/2} = \frac{1}{5(n-1)} \leq \frac{1}{100}$$

Aquesta escassa repercussió de la reducció del diàmetre en el nombre de vèrtexs reconnectats ha de permetre, com es demostrarà en l'apartat següent, mantenir el grau d'agregació dins d'uns marges molt restringits de forma que finalment serà possible reduir el diàmetre sense induir variacions perceptibles en la topologia local del graf (mesurada pel factor d'agregació) i reproduir en definitiva l'efecte petit-món sota qualsevol topologia de graf. Dels resultats anteriors es dedueix el teorema següent.

3 TEOREMA *Sigui $G = (V, E)$ un graf connex de diàmetre D i ordre n. Siguin $f_d, f_n \in \mathbb{R}^+$ amb $f_d \geq 1$ i $f_n \leq 1$ i tal que D/f_d és un nombre parell. En aquest cas, si $D \geq 2f_d/f_n$ és possible reduir el diàmetre de G en un factor més gran o igual a f_d reconnectant un percentatge de vèrtexs més petit o igual a f_n.*

La demostració és senzilla. Segons l'equació 2 és possible reduir el diàmetre d'un graf connex qualsevol fins a $D_f \leq D' = 2(k+1)$ (així, amb D' parell) mitjançant la reconnexió d'un conjunt de *hubs* tal que $f_n \leq \frac{1}{D'/2}$. Si es defineix $D' = D/f_d$ (que ha de ser parell) tindrem $D_f \leq D' = D/f_d$ i per tant podrà reduir-se el diàmetre en un factor més gran o igual a f_d amb un percentatge de reconnexió de $f_n \leq \frac{1}{D'/2} = 2\frac{f_d}{D}$ o, canviant la forma de l'expressió, tal que $2f_d/f_n \geq D$. D'aquesta forma, si volem obtenir un factor f_d mínim de reducció del diàmetre i un percentatge màxim de vèrtexs reconnectats $f_{n,\max}$ i tenim $D \geq 2f_d/f_{n,\max}$, existirà (com s'ha dit al paràgraf anterior) un conjunt H de *hubs* tal que $2f_d/f_n \geq D \geq 2f_d/f_{n,\max}$, de forma que es podrà reduir el diàmetre en un factor com a mínim f_d reconnectant un percentatge de vèrtexs $f_n \leq f_{n,\max}$.

La condició conforme a la qual D/f_d ha de ser un nombre parell es dedueix del fet que un f_d qualsevol pot comportar a la pràctica un f_d més gran. Suposem que tenim un graf G de diàmetre $D = 120$ i que volem escurçar el seu diàmetre en un factor de com a mínim $f_d = 9$, que no acompleix la condició de paritat especificada al teorema, i de forma que el percentatge màxim de vèrtexs afectats sigui $f_n = 0{,}95/6$. En aquest cas s'acomplirà la condició $D = 120 \geq 2f_d/f_n = 108/0{,}95$ i en conseqüència podria semblar possible reduir el diàmetre de G en un factor més gran o igual a $f_d = 9$ amb un percentatge de vèrtexs afectats $f_n \leq 0{,}95/6$. Ara bé, atès que $D/f_d = 120/9 = 13{,}33$, per a aconseguir un percentatge de reducció més gran o igual a $f_d = 9$ serà necessari, tenint en compte que amb l'esquema descrit només poden obtenir-se fites parelles del diàmetre, assolir un diàmetre final menor o igual a 12 de manera que un $f_d = 9$ suposarà a la pràctica un $f_d = 10$. En aquest cas la condició $D \geq 2f_d/f_n$ (mantenint el mateix f_n) no s'acomplirà ja que $D = 120$ no serà més gran que $2f_d/f_n = 120/0{,}95 > 120$ i per tant no serà possible en aquest cas tenir un $f_d = 9$ amb $f_n = 0{,}95/6$. Per tal d'evitar aquesta mobilitat del factor f_d l'enunciat del teorema 3 observa la condició que D/f_d sigui un nombre parell. Altrament, s'hauria de calcular per a cada graf el f_d' mínim tal que f_d' fos més gran o igual que f_d i D/f_d' fos un nombre parell, i posteriorment s'hauria d'aplicar aquest nou paràmetre f_d' a les condicions del teorema.

La restricció $n \geq k + 1$ de la proposició 1 podria reescriure's com $n \geq k + 1 = D'/2 = D/(2f_d)$. Ara bé, atès que per a qualsevol graf connex $n > D$ i a més f_d es més gran que la unitat, resulta que $n > D \geq D/f_d > D/(2f_d)$ i per tant la restricció s'acomplirà sempre. D'altra banda, i tenint en compte que el diàmetre mínim que podem assolir reconnectant els vèrtexs de G amb un graf estrella és $D_f = 2$ (en el cas que tots els vèrtexs de G siguin escollits com a *hubs* i per tant f_n sigui igual a la unitat), la reducció màxima que podem obtenir del diàmetre segons el teorema 3 és $f_{d,\max} = D/2$ de forma que $f_d \leq D/2$. Aquesta consideració queda, no obstant això, implícita en la restricció $D \geq 2f_d/f_n$ del teorema 3 (atès que f_n és per definició més petit o igual a la unitat) i dels teoremes que es desprenen en la secció següent.

4 Exemple Sigui G un graf connex d'ordre $n = 500$ i diàmetre $D = 120$. En aquest cas, segons el teorema 3, podrem reduir el diàmetre de G en un factor més gran o igual a $f_d = 10$ amb una intervenció en un percentatge de vèrtexs $f_n \leq 1/6$, atès que $120 = D \geq 2f_d/f_n = 120$, i resultarà $D_f \leq D' = D/f_d = 120/10 = 12$ amb un valor de $k = 5$ (ja que per definició $D' = 2k + 2$). Així, per tal de reduir el diàmetre del graf, hauríem de trobar un conjunt de vèrtexs 5-distància dominador, i resultarà un graf de diàmetre $D_f \leq 12$ mitjançant la reconnexió d'un nombre de vèrtexs $h \leq n/(k + 1)$, és a dir, de manera que el percentatge de vèrtexs afectats serà $f_n = h/n \leq 1/(k + 1) = 1/6$.

En el cas de tenir un graf no connex els resultats de l'anterior teorema serien encara vàlids amb la particularitat que la condició $n \geq k + 1 = D'/2 = D/(2f_d)$ (que hem vist que s'acomplia sempre per al cas de grafs connexos) s'hauria d'aplicar per separat sobre cadascun dels components connexos del graf.

És important notar a més que la condició $D \geq 2f_d/f_n$ recollida en el teorema 3 no és en general restrictiva ja que per reproduir l'efecte petit-món (és a dir, per reduir considerablement el diàmetre d'un graf sense afectar el seu factor d'agregació) partirem de grafs amb un diàmetre elevat. A més, com més gran sigui el diàmetre d'un graf més gran podrà ser la relació f_d/f_n i per tant major la reducció del diàmetre, particularitat que ha quedat palesa en l'exemple 4 en el qual s'ha vist que, una vegada determinat el diàmetre final $D_f = 20$, el percentatge de vèrtexs afectats o *hubs* és independent del diàmetre inicial del graf.

D'aquesta manera, donat un graf qualsevol $G = (V, E)$, serà possible reduir el seu diàmetre sense que sigui necessari reconnectar un nombre considerable de vèrtexs o *hubs*. D'altra banda, i atès que la reconnexió dels *hubs* es farà amb un graf estrella, el nombre d'arestes addicionals no serà en general gran. En l'apartat següent es demostra, a partir d'aquestes premisses i repetint l'esquema de reconnexió descrit, la possibilitat de conservar el factor d'agregació dins d'uns marges restringits i per tant de reduir el diàmetre sense induir canvis perceptibles en el grau d'agregació del graf (és a dir, sense que un observador local pugui percebre a priori l'escurçament del diàmetre) i reproduir així el denominat efecte petit-món en qualsevol topologia de xarxa.

6 Universalitat de l'efecte petit-món: conservació del factor d'agregació

En l'apartat anterior s'ha demostrat que és possible reduir de forma considerable el diàmetre d'un graf sense afectar una proporció f_n elevada de vèrtexs. A partir de les fites d'aquest percentatge f_n demostrarem en aquest apartat que és possible reduir el diàmetre sense haver d'alterar perceptiblement el grau d'agregació del graf, és a dir, sense induir variacions perceptibles en la seva topologia local. Com que els resultats obtinguts són més restrictius i els càlculs més simples, calcularem només les fites del factor d'agregació en el cas que el *hub* arrel sigui un vèrtex afegit al graf (així, en aquest cas tindrem els h *hubs* del conjunt H més el *hub* arrel que s'afegirà als vèrtexs del graf). Treballant d'aquesta forma només haurem de calcular la variació de l'agregació dels *hubs*, contràriament a l'anàlisi que s'hauria de fer en el cas que el *hub* arrel pertanyés originalment al graf i que hauria de considerar a més els canvis en els vèrtexs de G adjacents tant el *hub* arrel com a algun altre vèrtex d'H [15]. No obstant això, les fites obtingudes són en els dos casos formalment anàlogues i per tant les conclusions que se n'extreuen són les mateixes.

D'altra banda, i encara que en general el conjunt H de *hubs* serà un conjunt k-distància dominador minimal, no és possible establir hipòtesis sobre les distàncies a què es troben els diferents vèrtexs d'H, tal com es pot comprovar a la figura 7. D'aquesta forma haurem de considerar d'ara endavant la possibilitat que dos vèrtexs d'H siguin adjacents (i. e. la seva distància sigui la unitat).

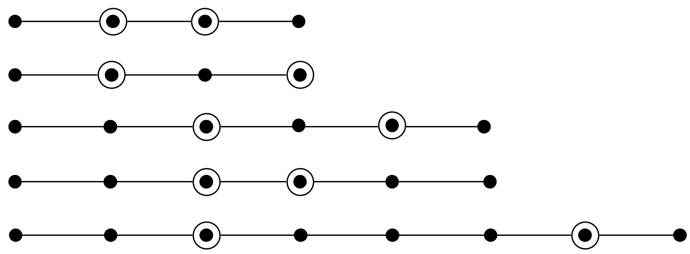

FIGURA 7: Exemples de conjunts k-distància dominadors. Als dos primers grafs s'han assenyalat dos conjunts 1-distància dominadors minimals, mentre que al tercer, quart i cinquè s'il·lustren conjunts 2- distància dominadors minimals. Com es pot observar la distància entre els vèrtexs d'aquests conjunts pot ser més gran o igual a 1 en els dos primers casos i més gran, igual o menor a 2 en els tres últims.

Començarem calculant l'increment màxim del factor d'agregació que es pot produir en un *hub* no arrel després de la reconnexió del graf (és a dir, una vegada s'han dibuixat les arestes entre el *hub* arrel i la resta de *hubs*). Donat així un *hub* no arrel $v \in H$ de grau inicial δ_v i tal que un nombre $\mathcal{T}$ de parells de vèrtexs adjacents a v són igualment adjacents entre si (i. e. tal que v pertany a un nombre de triangles igual a $\mathcal{T}$), el factor d'agregació de v és per definició

$$c_v = \frac{\mathcal{T}}{\delta_v(\delta_v - 1)/2}\,.$$

L'augment màxim del factor d'agregació es produirà en el cas que tots els vèrtexs adjacents a v siguin a més *hubs*. En aquest cas la doble connexió del *hub* arrel amb el vèrtex v i el seu veí *hub* sumarà un nou triangle (vegeu la figura 8) al càlcul del nou factor d'agregació. Per a cada *hub* veí de v haurem de sumar així un nou triangle, de forma que el nombre màxim de nous triangles vindrà determinat pel cardinal d'H i també pel nombre de veïns de v (i. e. del seu grau δ_v). Per simplicitat farem servir la segona d'aquestes fites. Així, el nou factor d'agregació serà com a màxim

$$c'_v = \frac{\mathcal{T} + \delta_v}{(\delta_v + 1)\delta_v/2}\,,$$

ja que el grau de v haurà augmentat en una unitat i el nombre de parells de vèrtexs adjacents a v i adjacents entre si serà ara com a molt $\mathcal{T} + \delta_v$. En aquest cas, l'augment màxim del factor d'agregació de v es calcularà com

$$\Delta_m^+ = \frac{\mathcal{T} + \delta_v}{(\delta_v + 1)\delta_v/2} - \frac{\mathcal{T}}{\delta_v(\delta_v - 1)/2} = \frac{2(1 - c_v)}{\delta_v + 1} \le \frac{2(1 - c_{\min})}{\delta + 1} \le \frac{2}{\delta + 1}\,, \quad (3)$$

on δ i $c_{\min}$ denoten el grau i el factor d'agregació mínims, respectivament, dels vèrtexs del graf G. Prenent l'últim o el penúltim terme de la desigualtat tindrem una fita més o menys restrictiva de l'increment màxim de l'agregació.

D'altra banda, per calcular la disminució màxima del factor d'agregació d'un *hub* v no arrel s'ha de considerar la possibilitat que en afegir l'aresta que va de v al *hub* arrel, el numerador de c_v no resulti afectat. Com en l'operació de reconnexió no s'extrauran arestes del graf, aquest numerador (que compta el nombre de triangles als quals pertany v) no podrà disminuir. D'aquesta manera la disminució màxima del factor d'agregació es produirà en el cas que el numerador no es modifiqui i vindrà determinada per l'augment del denominador, que haurà de considerar l'increment en una unitat del grau de v, i resultarà la variació màxima següent:

$$\Delta_m^- = \frac{\mathcal{T}}{\delta_v(\delta_v - 1)/2} - \frac{\mathcal{T}}{(\delta_v + 1)\delta_v/2} = \frac{2c_v}{\delta_v + 1} \le \frac{2c_{\max}}{\delta + 1} \le \frac{2}{\delta + 1} \quad (4)$$

on $c_{\max}$ designa el factor d'agregació màxim dels vèrtexs de G. Com a l'equació 3, es poden considerar dues fites en cas de prendre l'últim o el penúltim terme de la desigualtat.

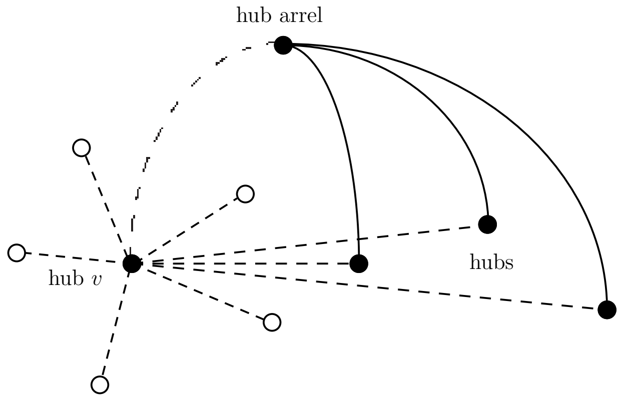

FIGURA 8: Reconnexió d'un *hub* v no arrel. Les línies contínues denoten els triangles afegits.

A continuació s'han de repetir els càlculs per al *hub* arrel, molt més simples. D'una banda tindrem $\Delta_m^+ = 1$, en el poc probable (però possible, com s'ha vist a la figura 7) cas que tots els vèrtexs d'H siguin adjacents entre si, ja que llavors el factor d'agregació haurà passat d'un valor de zero (inicialment el *hub* arrel no pertany al graf G) al valor màxim igual a 1 (tots els veïns del *hub* arrel seran adjacents entre si). D'altra banda, i com inicialment no tenim cap valor i l'agregació és un paràmetre positiu, pel *hub* arrel no podrem tenir una disminució del factor d'agregació i per tant $\Delta_m^- = 0$.

Fent ús dels resultats anteriors és possible calcular la variació màxima del factor d'agregació d'un graf arbitrari després d'haver escollit un conjunt H de *hubs* i d'haver-lo connectat amb un graf estrella, tal com s'ha descrit al llarg de l'article. Sigui així C_f el factor d'agregació final del graf, C_0 l'agregació inicial, δ y Δ els graus mínim i màxim, $f_n = h/n$ el percentatge de vèrtexs reconnectats (segons s'ha definit en els resultats de l'apartat anterior) i siguin $c_{\min}$ i $c_{\max}$ els factors d'agregació mínim i màxim dels vèrtexs de G. Hem de tenir en compte que el nombre de *hubs* no arrels és igual a h i que l'ordre del graf haurà augmentat una unitat i ara valdrà $n + 1$. Igualment cal recordar que el factor d'agregació de G s'obté de calcular la mitjana del factor d'agregació de cadascun dels seus vèrtexs.

Calcularem primer el sumatori del factor d'agregació de tots els vèrtexs del graf i després farem la mitjana dividint per $n + 1$ (i això, de moment, considerant un increment de l'agregació). Així, aquest sumatori serà inicialment igual a nC_0 (l'ordre inicial de G és n). A aquesta quantitat haurem de sumar l'increment màxim del factor d'agregació dels *hubs*. Per als *hubs* no arrels aquest augment màxim és, com s'ha vist, igual a $2(1 - c_{\min})/(\delta + 1)$, quantitat que s'ha de multiplicar pel nombre $h = nf_n$ de *hubs* no arrels. Igualment haurem d'afegir una unitat com a increment màxim del factor d'agregació del *hub* arrel. Si sumem aquestes quantitats i fem la mitjana en dividir per $n+1$ obtindrem la fita següent:

$$C_f \leq C_0\frac{n}{n+1}+f_n\frac{n}{n+1}\frac{2(1-c_{\min})}{\delta+1}+\frac{1}{n+1}\leq C_0\frac{n}{n+1}+f_n\frac{n}{n+1}\frac{2}{\delta+1}+\frac{1}{n+1}\,.$$

Anàlogament es pot calcular la fita del factor d'agregació final en el cas de produir-se una disminució, tenint en compte que ara el *hub* arrel no intervindrà:

$$C_f \geq C_0\frac{n}{n+1}-f_n\frac{n}{n+1}\frac{2c_{\max}}{\delta+1}\geq C_0\frac{n}{n+1}-f_n\frac{n}{n+1}\frac{2}{\delta+1}\,.$$

Així, la variació del factor d'agregació podrà ser tan imperceptible com es vulgui sempre que prenguem un valor de f_n prou petit, com s'ha explicat que és possible en l'apartat anterior. En aquest cas, a més, tindrem normalment valors alts de n (ja que tindrem grafs amb un diàmetre alt i per grafs connexos n és sempre més gran que el diàmetre) de manera que l'últim terme de la primera expressió no tindrà gaire ressò. Combinant aquestes fites amb el teorema 3 de l'apartat anterior s'obté el teorema que demostra la possibilitat de reduir de manera considerable (i arbitràriament gran) el diàmetre d'un graf qualsevol sense induir en l'operació variacions perceptibles del factor d'agregació.

5 Teorema *Sigui un graf connex $G=(V,E)$ de diàmetre D, ordre n, factor d'agregació C_0, agregació mínima $c_{\min}$, agregació màxima $c_{\max}$ i grau mínim δ. Siguin $f_d, f_n \in \mathbb{R}^+$ amb $f_d \geq 1$ i $f_n \leq 1$ i tal que D/f_d sigui un nombre parell. En aquest cas, si $D \geq 2f_d/f_n$, serà possible reduir el diàmetre de G en un factor més gran o igual a f_d de manera que l'ordre del graf augmenti en una unitat i que el factor d'agregació final estigui fitat per les expressions següents:*

$$C_f \leq C_0\frac{n}{n+1}+f_n\frac{n}{n+1}\frac{2(1-c_{\min})}{\delta+1}+\frac{1}{n+1}\leq C_0\frac{n}{n+1}+f_n\frac{n}{n+1}\frac{2}{\delta+1}+\frac{1}{n+1}$$

i

$$C_f \geq C_0\frac{n}{n+1}-f_n\frac{n}{n+1}\frac{2c_{\max}}{\delta+1}\geq C_0\frac{n}{n+1}-f_n\frac{n}{n+1}\frac{2}{\delta+1}\,.$$

D'altra banda, en els casos en què la condició $D \geq 2f_d/f_n$ no s'acompleixi podrà donar-se l'efecte petit-món, encara que serà necessari conèixer la topologia del graf per determinar la seva presència. En el cas que el graf G no sigui connex, els resultats del teorema 5 seran encara vàlids. En aquest cas, no obstant això, la condició $n \geq k+1 = D'/2 = D/(2f_d)$ (que, com s'ha vist en el teorema 3, s'acompleix sempre i que, per tant, no ha quedat inclosa a l'enunciat) s'haurà d'aplicar per separat a cadascun dels components connexos de G. D'aquesta manera els resultats descrits per grafs connexos poden estendre's a grafs no connexos amb la condició que en aquest cas s'acompleixi per a cada component connex de G (l'ordre del qual es denotarà com n_i) la desigualtat $n_i \geq D/(2f_d)$.

Com a coro·lari del teorema anterior es pot afirmar (tal com s'ha dit que es volia fer al començament de l'article) que tota xarxa o graf amb diàmetre prou alt pot convertir-se en una xarxa petit-món amb independència de la seva topologia, i patir per tant els efectes que en la xarxa pot induir la transició a l'estat petit-món (com van descriure Watts i Strogatz en el seu article). L'expressió «diàmetre prou gran» no imposa cap restricció ja que l'efecte petit-món consta d'una reducció gran del diàmetre del graf i només pot produir-se per tant en grafs i xarxes amb diàmetre alt.

Altrament, per al cas de xarxes de diàmetre petit (i encara que no s'hi pugui parlar estrictament de l'efecte petit-món) les fites del teorema 5 seran igualment vàlides i podran fer-se servir per calcular la variació màxima de l'agregació del graf en el cas d'escurçament, ni que sigui en un grau petit, del seu diàmetre.

7 L'efecte petit-món: alguns exemples

Suposem que tenim un graf G amb els mateixos paràmetres que el graf de l'article de Watts i Strogatz, encara que amb una topologia arbitrària. G serà així un graf regular d'ordre $n = 1000$, diàmetre $D = 100$ i grau mínim i màxim $\Delta = \delta = 10$, amb un factor d'agregació de $C_0 = 0{,}67$. Atesa la simetria del graf (que en el cas de Watts i Strogatz és vèrtex-simètric) l'agregació és la mateixa per a tots els vèrtexs i per tant $c_{\max} = c_{\min} = C_0 = 0{,}67$.

En aquest cas, conforme al teorema 3, és possible reduir el diàmetre de G en un factor f_d més gran o igual a $50/7 = 7,14$ reconnectant un percentatge f_n de vèrtexs menor o igual a $1/7$ ja que $D = 100 \geq 2f_d/f_n = 100$. El diàmetre final serà en aquest cas $D_f \leq D/f_d = 14$. D'altra banda el factor d'agregació quedaria fitat, segons el teorema 5, dins de l'interval

$$0{,}649 \leq C_f \leq 0{,}675\,.$$

D'aquesta manera serà possible reduir el diàmetre de 100 fins a 14 (i això per a qualsevol topologia de G) amb una variació màxima del factor d'agregació del 2,7 %, és a dir, sense que cap observador local ni la suma d'uns quants observadors locals puguin adonar-se'n a priori (i obviant, és clar, el que podria veure un observador situat al *hub* arrel). Com s'ha dit, aquestes fites també podrien calcular-se per al cas en què el *hub* arrel s'escollís d'entre un dels vèrtexs d'H [15], i resultaria

$$0{,}648 \leq C_f \leq 0{,}698\,,$$

en el cas que no s'hagués pogut trobar cap conjunt 6-distància dominador amb un vèrtex no adjacent a la resta, o

$$0{,}648 \leq C_f \leq 0{,}678$$

en cas contrari, de forma que les conclusions serien aproximadament les mateixes que per al cas on el *hub* arrel s'afegeix al graf.

D'altra banda, tenint en compte que en l'exemple anterior el marge de variació de C_f ha estat molt petit podrien modificar-se els factors de variació i prendre una f_d més gran o igual a 16 i un percentatge f_n menor o igual a $1/3$ de forma que $D = 100 \geq 2f_d/f_n = 96$. En aquest cas les fites del factor d'agregació seran

$$0{,}6256 \leq C_f \leq 0{,}6872$$

de forma que serà possible obtenir un diàmetre final més petit o igual a 6 amb una variació del factor d'agregació de com a molt un 6,15 %.

Com en aquest cas f_d s'ha escollit tal que D/f_d no és un nombre enter i parell, el valor $f_d \geq 16$ implicarà $D_f \leq 6,25$ i per tant resultarà $D_f \leq 6$ i tindrem un valor efectiu de $f_d = 100/6$ que en tot cas acomplirà la condició $D \geq 2f_d/f_n$. Per evitar aquestes consideracions (tal com es s'ha explicat en l'apartat anterior i recullen els enunciats dels anteriors teoremes) s'escollirà en general un f_d tal que D/f_d sigui un nombre parell.

Així, donat un graf G amb els mateixos paràmetres que les xarxes de Watts i Strogatz podrem reduir el diàmetre del seu valor inicial de 100 fins a un diàmetre final de 6 amb una variació màxima del factor d'agregació del 6,15 %. En el cas que no es volguessin restringir els valors mínim i màxim del factor d'agregació del graf $c_{\min}$ i $c_{\max}$, per tal d'obtenir fites per topologies més genèriques de grafs, es podrien aplicar les fites menys restrictives del teorema 5 i resultaria la mateixa reducció del diàmetre i una variació màxima del factor d'agregació del 9,18 %. Cal afegir a més que, atès el caràcter puntual del factor d'agregació (el seu valor depèn només del que passa a les proximitats de cada vèrtex), la hipòtesi de tenir un graf amb un factor d'agregació igual a 0,67 no és molt restrictiva, en el sentit que podrien trobar-se nombroses topologies de xarxa amb aquest valor.

Watts i Strogatz podrien haver treballat d'aquesta forma amb qualsevol topologia de xarxa ja que, donada la universalitat de l'efecte petit-món, és a dir, la possibilitat de reduir el diàmetre d'una topologia de xarxa arbitrària sense alterar perceptiblement la seva topologia local, hauria estat possible reproduir sempre, si més no amb una estratègia determinista, la naturalesa dels seus experiments.

8 Conclusions

Com s'ha dit en la introducció d'aquest article, l'interès de l'efecte petit-món s'explica per l'ampli abast de les seves aplicacions. En el seu article [17] Watts i Strogatz van explicar el funcionament d'aquest tipus de xarxes i van suggerir la ubiqüitat de les seves característiques assenyalant la seva presència en el sistema neuronal del cuc Caenorhabditis Elegans, la xarxa de subministrament elèctric de l'oest dels EUA i el graf de col·laboració de l'actor nord-americà Kevin Bacon. Posteriorment es va trobar el mateix esquema en d'altres tipus de xarxes, com ara el graf de col·laboració de Paul Erdös [3] o la mateixa *world wi-*

de web [1], i es va demostrar igualment la possibilitat de reproduir i accentuar l'efecte de forma determinista en algunes famílies de grafs [6], [15].

En el present article s'ha demostrat la universalitat efectiva (o ubiqüitat) del fenomen. És a dir, la possibilitat, donada una topologia de xarxa qualsevol i de diàmetre elevat, de trobar una estratègia capaç de reduir el diàmetre de la xarxa sense induir variacions considerables en el factor d'agregació, és a dir, sense que un observador local (situat en un dels vèrtexs de la xarxa) o la suma de diversos observadors locals (que són els observadors típics) puguin adonar-se directament dels canvis i prescriure mesures preventives. Igualment l'efecte petit món és susceptible de servir de model de xarxes telemàtiques (la *world wide web*, per exemple, o una xarxa GSM de telefonia mòbil) per tal d'escurçar el diàmetre (aplicant els esquemes de reconnexió emprats en les demostracions anteriors) amb un nombre mínim de reconnexions (és a dir, amb una inversió mínima) o com a pauta per comprendre el sistema nerviós animal o la forma com les diferents parts del neurocòrtex entren en ressonància per crear imatges perceptives i reaccions conscients.

Agraïments

L'autor vol agrair a la Beatriz Huarte la revisió d'aquest article, així com l'ajut del seu director de tesis, Francesc Comellas, i la confiança de l'Oriol Serra i els seus consells sempre adients i oportuns. També voldria agrair l'ajut que un moment o altre li han confiat la resta de companys dels departaments de Matemàtica Aplicada IV, especialment l'Anna Lladó, i d'Enginyeria Telemàtica de la Universitat Politècnica de Catalunya.

Referències

[1] Albert, R.; Jeong, H.; Barabási, A. L. «Diameter of the world wide web» *Nature*, vol. 401, (1999), 130–131.

[2] Barthelemy, M.; Amaral, L. A. N. «Small-world networks: Evidence for a crossover picture». *Phys. Rev. Lett.*, vol. 82, núm. 15, (1999), 3180–3183.

[3] Castro, R. de; Grossman, J. W. «Famous trails to Paul Erdös». *The Mathematical Intelligencer*, vol. 21, núm. 3, (1999), 51–63.

[4] Cohen, G.; Honkala, I.; Litsyn, S.; Lobstein, A. *Covering Codes.* North Holland: North Holland Mathematical Library, Elsevier, 1997.

[5] Comellas, F.; Ozón, J. «On the universality of small-world graphs». *Electronic Notes on Discrete Mathematics*, vol. 10, 2001.

[6] Comellas, F.; Ozón, J.; Peters, J. «Deterministic small-world communication networks». *Information Processing Letters*, vol. 76, (2000), 83–90.

[7] Gimbert, J.; Moreno, R.; Ribó, J. M.; Valls, M. *Apropament a la teoria de grafs i als seus algorismes.* Lleida: Edicions de la Universitat de Lleida, 1998.

[8] HAYES, T. W.; HEDETNIEMI, S. T.; SLATER, P. J. *Fundamentals of Domination in Graphs*. Nova York: Marcel Dekker Inc., 1998.

[9] HENNING, M. A.; OELLERMANN, O. R.; SWART, H. C. «Bounds on distance domination parameters». *J. Combin. Inform. System Sci.*, vol. 16, (1991), 11–18.

[10] HERZEL, H. «How to quantify 'small-world' networks?» *Fractals*, vol. 6, núm. 4, (1998), 301–303.

[11] HOSTALOT, J. *Un nou model de xarxes d'interconnexió: Xarxes small-world basades en malles toroidals*. Treball final decarrera EUPBL, Barcelona, 2000.

[12] KASTURIRANGAN, R. *Multiple scales in small-world graphs*. Massachusetts Institute of Technology AI Lab., Memo 1663, 1999.

[13] KLEINBERG, J. M. «Navigation in a small world». *Nature*, vol. 406, (2000), 845.

[14] NEWMAN, M. E. J. «Models of the small world». *J. Stat. Phys.*, vol. 101, (2000), 819–841.

[15] OZÓN, J. *Contribución al coloreado de grafos y las redes pequeño-mundo*. Tesi doctoral Programa de Doctorat de Matemàtica Aplicada de la Universitat Politècnica de Catalunya, dirigida per Francesc Comellas, 2001.

[16] WATTS, D. J. *Small Worlds*. Princeton: Princeton University Press, 1999.

[17] WATTS, D. J.; STROGATZ, H. «Collective dynamics of small-world networks». *Nature*, vol. 393, (1998), 440–442.

[18] WILSON, R. J. *Introducción a la Teoría de Grafos*. Madrid: Alianza Universidad, Alianza Editorial, 1972.

JAVIER OZÓN
DEPARTAMENT D'ENGINYERIA TELEMÀTICA
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
ozzy@mat.upc.es